**Discrete Mathematics Assignment**

Matroid and Greedy Algorithm

2013210061 채윤병

매트로이드는 Hassler Whitney가 1935년에 고안했다. 이후에 B.L,, van der Waerden 이 발견했다. 둘 다 독립성의 일반적인 개념을 고안하는 것에 흥미를 갖고 있었다. 매트로이드는 집합 E와 E의 부분집합들의 집합 I로 구성된다. 매트로이드는 다음 공리들을 만족시켜야 한다.

1. 공집합은 독립 집합이다. (공집합의 독립성)
2. 독립 집합의 부분집합은 독립이다. (독립성의 유전)
3. ‘만약 A,B가 I에 속하고 A는 I의 극대 원소이고 , B가 극대 원소가 아니라면 B 합집합 {a}가 I에 속한다’ 를 만족하는 a가 A-B에 속한다. (추가성)
4. A가 I의 원소이고, A가 B의 부분집합이고, B가 C의 부분집합이면 \mathcal I\cap [A,B]=\{S\in\mathcal I\colon A\subset S\subset B\}는 극대 원소를 갖는다.

또 다음과 같은 특징을 가진다.

탐욕적인 알고리즘은 “가장 좋아 보이는 것”을 각 단계에서 고르는 알고리즘이다. A에서 D까지 가는데 B와 C를 거쳐서 가는 문제를 생각해보자. A에서 가장 가까운 곳을 가고 다음 단계에서 가장 가까운 곳으로, 즉 모든 단계에서 가장 가까운 곳을 가면 전체적인 경로가 가장 가까워지는 문제들이 있다. 이러한 문제들은 탐욕적인 알고리즘을 통해 푼다면 최적의 해를 구할 수 있다.

하지만 우리들은 문제를 풀기 위해 적당한 알고리즘을 골라야 하는데 무슨 알고리즘을 적용해야 최적의 해가 도출될 지 알기 어렵다. 어떤 조건에서 탐욕적인 알고리즘이 최적인지 아니면 최적에 가까운지 한 번에 알아차리기 어렵다. 하지만 우리는 탐욕적인 알고리즘이 언제 최적의 해를 가져다 주는지 알기 위해 메트로이드를 사용할 수 있다. 어떤 특별한 구조가 있는 문제에 대해서는 탐욕 알고리즘이 언제나 최적의 해를 찾아낼 수 있다. 이 구조를 매트로이드라 한다. 매트로이드와 탐욕적인 알고리즘 사이의 관계를 설명할 때는 두 가지의 개념이 중요한데 하나는 “순환을 만드는 간선이 없다”는 것과 “선형 독립 벡터의 집합이다”라는 것이고, 두 개념은 동일한 개념이다.

매트로이드에서 탐욕적인 알고리즘을 적용했을 때 최적이라는 것은 다음을 의미한다.

1. 만약 M이 매트로이드라면 어떤 비용함수에서도 탐욕적인 알고리즘은 최적으로 작동한다.
2. 만약 탐욕적인 알고리즘이 모든 비용함수에서 최적으로 작동한다면, M은 매트로이드다.

순환을 만드는 간선이 없다는 특징은 최소 신장 트리의 특징이다. 따라서 최소 신장 트리도 매트로이드이다. 따라서 최소 신장 트리를 구현하기 위한 가장 최적의 알고리즘은 탐욕적인 알고리즘이다. 만약 우리가 탐욕적인 알고리즘을 쓰기에 합리적인 문제인지 판단하려면 해당 문제가 매트로이드의 특징을 보이는지 확인해보자